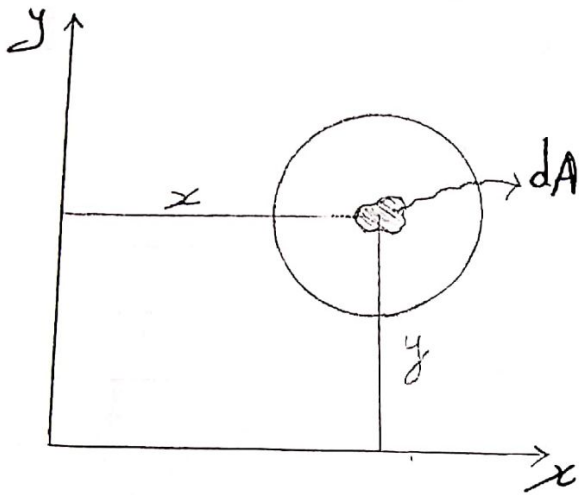


عزم عطالة المقاطع العرضية

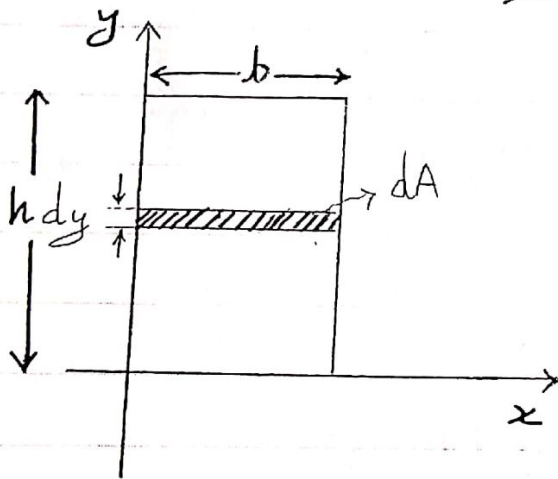
عزم العطالة المحوري:



$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

إذا كان الشكل مستطيل:



$$dA = b dy$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy$$

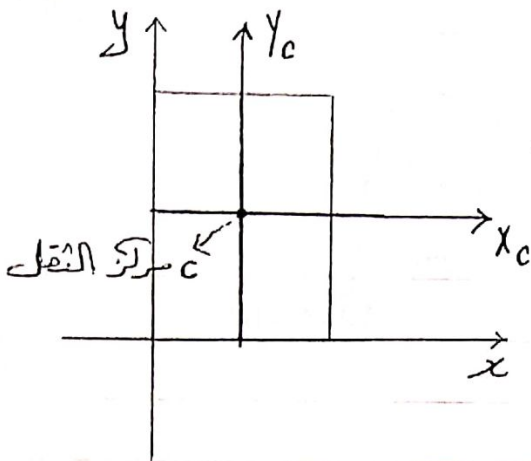
$$= b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h$$

$$I_x = \frac{b h^3}{3}$$

ونفس الطريقة نجد:

$$I_y = \frac{h b^3}{3}$$

• إذا كان المحور يمر من مركز عطالة الجسم :



$$I_{x_c} = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy$$

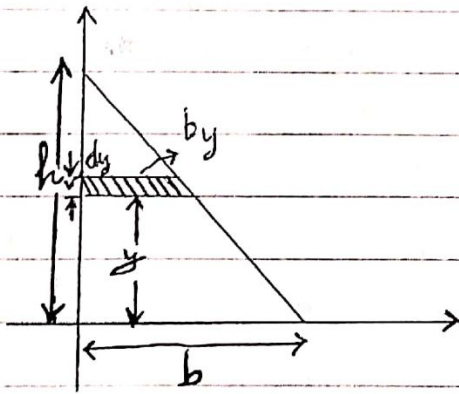
$$I_{x_c} = b \cdot \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-h/2}^{+h/2}$$

$$I_{x_c} = \frac{b}{3} \left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right]$$

$$I_{x_c} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{y_c} = \frac{hb^3}{12}$$

• قلنا : حسب التالي :



$$\frac{by}{b} = \frac{h-y}{h}$$

$$\Rightarrow by = \frac{b}{h} (h-y)$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 \frac{b}{h} (h-y) dy$$

$$= \frac{b}{h} \left[\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4} \right]$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{bh^4}{12}$$

ونبقى المبرقة في :

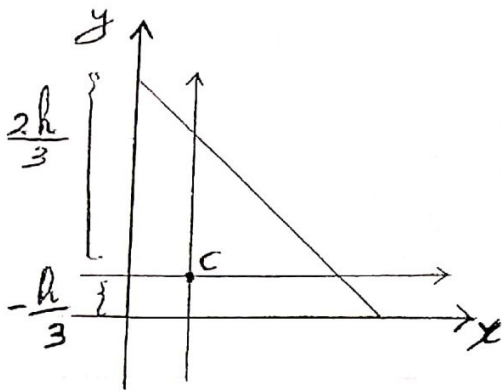
$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_x = \frac{bh^4}{12}$$

وهنا : $[m^4] = [cm^4]$

page :

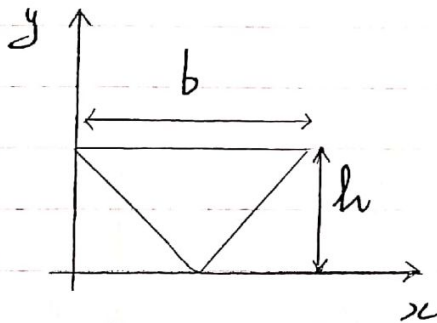
إذا كان المحور يمر من مركز العطالة الثالث:



$$I_{x_c} = \int_{-h/3}^{2h/3} y^2 dA$$

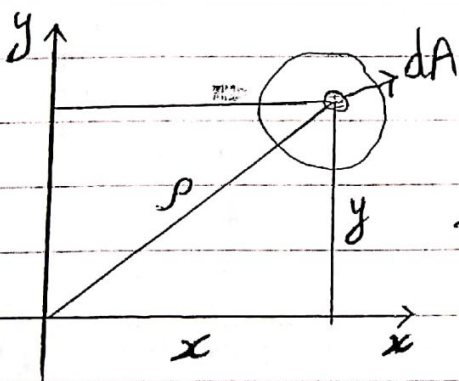
$$I_{x_c} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{y_c} = \frac{hb^3}{36}$$



$$I_x = \frac{bh^3}{4}$$

عزم العطالة القطبي:

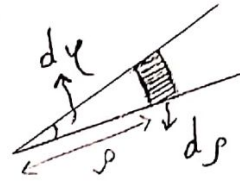
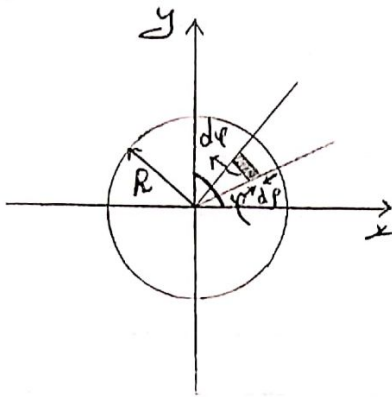


$$I_p = \int_A \rho^2 dA$$

$$I_p = \int_A (x^2 + y^2) dA$$

$$I_p = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA$$

$$I_p = I_y + I_x$$



$$dA = r dr d\phi$$

$$I_p = \int_A r^3 dr d\phi$$

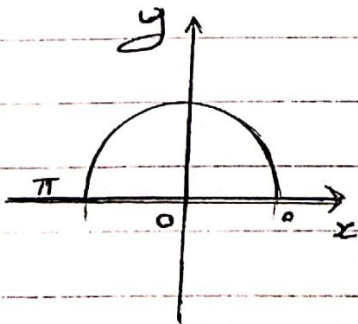
$$I_p = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 dr d\phi$$

$$I_p = \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^R r^3 dr$$

$$I_p = \left[\phi \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{2\pi R^4}{4}$$

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} = 2 I_x = 2 I_y$$

$$\Rightarrow I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

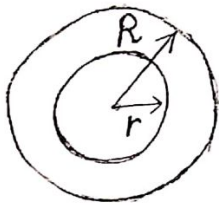


• إذا كان نصف الدائرة من π إلى 0 .

$$I_p = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{8}$$

• حلقة :



$$c = \frac{d}{D}$$

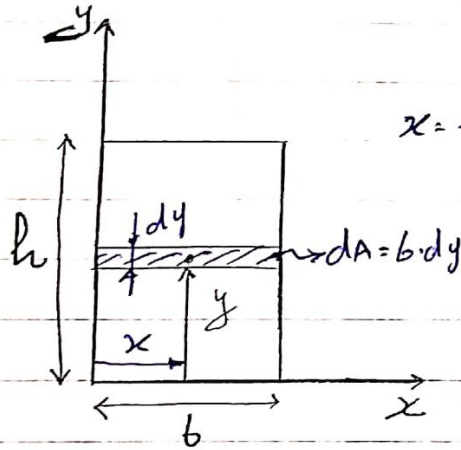
$$I_p = I_{pR} - I_{pr}$$

$$I_p = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4)$$

$$I_p = \frac{\pi}{2} R^4 \left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right)$$

$$I_p \approx 0.1 D^4 (1 - c^4)$$

عزم العطالة الطارد المركزي (الناثبي):



$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \, dA$$

$$x = \frac{b}{2}$$

$$I_{xy} = \int_A \frac{b^2}{2} y \, dy$$

$$x = \frac{b}{2}$$

$$dA = b \, dy$$

* مستطيل :

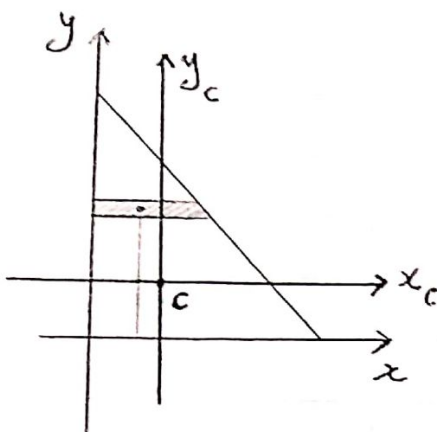
$$I_{xy} = \frac{b^2 h^3}{4}$$

• لو أخذنا المحاور من ع المستطيل كان:

حيث ع مركز عطالة المستطيل

$$I_{xy_c} = 0$$

• رأي شكل متناظر بالنسبة للمحورين أو لأحد المحاور فإن عزم العطالة الناثبي سيأدي الصفر



$$x = \frac{by}{2}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{24}$$

$$I_{xy_c} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

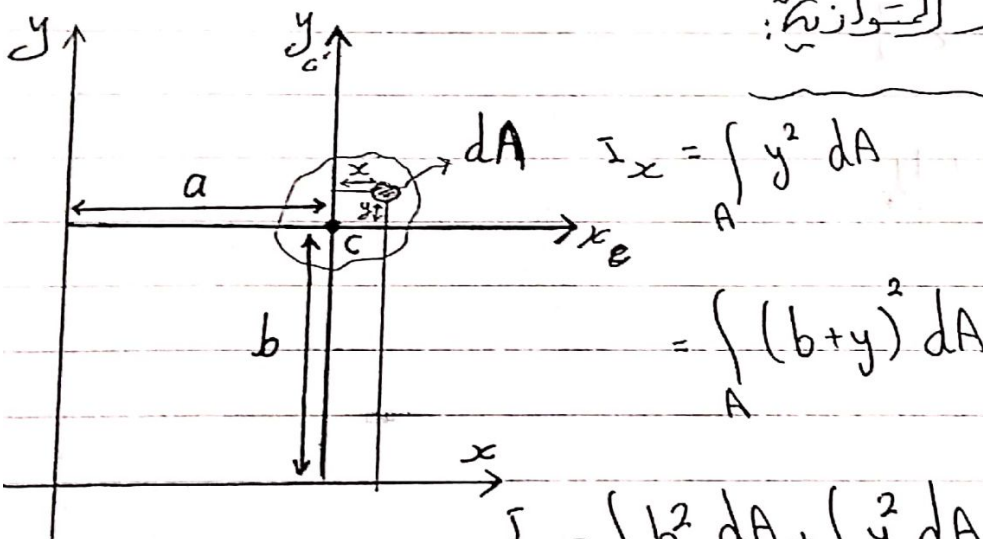
النتيجة:

ملاحظة:

أن عزم العطالة للطارد المركزي قد يكون موجباً أو سالباً وفي حالات خاصة قد يكون معدوماً، في حال كلا المحاورين أو لأحدهما
فد تنظر للشكل فإنت:

$$I_{xy} = 0$$

نظرية المحاور المتوازنة:



$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$= \int_A (b+y)^2 dA$$

$$I_x = \int_A b^2 dA + \int_A y^2 dA + \int_A 2by dA$$

$$2b \int_A y_c dA$$

لدينا $y_c = 0$

$$I_x = I_{x_c} + b^2 A$$

$$I_y = I_{y_c} + a^2 A$$

حيث a و b هو البعد بين المحاورين

$$I_p = I_x + I_y$$

الخطوة:

$$= I_{x_c} + I_{y_c} + A(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$I_p = I_{p_c} + \sum A$$

$$I_{xy} = I_{xy_c} + a \cdot b \cdot A$$

لدينا:

$$I_{xy} = \int x \cdot y \, dA$$

$$= \int (a + x_c)(b + y_c) \, dA$$

$$= \int a \cdot b \, dA + \int x_c y_c \, dA + \underbrace{\int a y_c \, dA}_0 + \underbrace{\int b x_c \, dA}_0$$

$$I_{xy} = I_{xy_c} + a \cdot b \cdot A$$

ملاحظة:

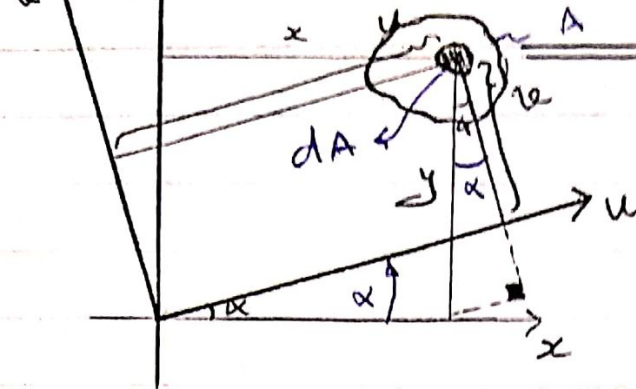
إذا كان يوجد أشكال مختلفة متعددة:

$$I_x = \sum_{i=1}^n I_{x_i}$$

$$I_p = \sum_{i=1}^n I_{p_i}$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n I_{xy_i}$$

تغير عزم العطالة في حال الدوران بمزاوية α :



$$v = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

$$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA$$

$$I_u = \int_A y^2 \cos^2 \alpha dA + \int_A x^2 \sin^2 \alpha dA - \int_A 2xy \cos \alpha \sin \alpha dA$$

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2 I_{xy} \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{uv} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha$$

$$I_p = I_u + I_v = I_x + I_y$$

دائماً مجموع
عزم العطالة
بالنسبة لأي
محورين متعامدين
يساوي إلى عزم العطالة

page :

حتى نوجد سوية الزاوية α المحل المشتقة بالنسبة للزاوية ساوي الكهف.

حيث نجد لنا القيمة العظمى والصغرى لـ I_u :

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = I_x \sin \alpha \cos \alpha + I_y \cos \alpha \sin \alpha - I_{xy} 2 \cos 2\alpha = 0$$

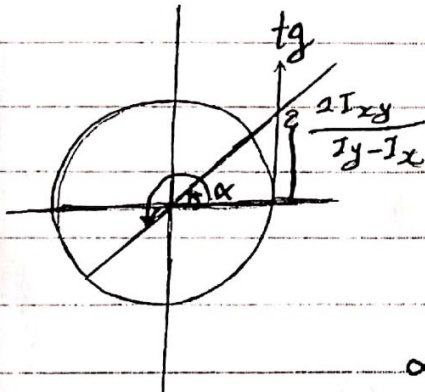
$$= -I_x \sin 2\alpha + I_y \sin 2\alpha - 2I_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

$$(I_x - I_y) \sin 2\alpha = -2I_{xy} \cos 2\alpha$$

نضرب بـ $\cos 2\alpha$ ونقسم على $\cos 2\alpha$

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}}$$

أي سوية I_u حدية عظمى أو صغرى وكذلك بالنسبة لـ I_v



$$\begin{aligned} \alpha'_0 &= \alpha_0 \\ 2\alpha''_0 &= 2\alpha + \pi \\ \alpha''_0 &= \alpha_0 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

أنه العلاقة رقم ① تعطينا قيمتين للزاوية α وهذا يوحد محورين متعامدين يكون لعزوم العطالة بالنسبة لهما نهايات حدية بالنسبة لأحدهما عظمى وبالنسبة للآخر صغرى. إن تلك المحاور سمتى المحاور الرئيسية للعطالة وعزوم العطالة حولها سمتى عزوم العطالة الرئيسية. أما المحاور التي تمر بمركز الثقل سمتى بالمحاور المركزية الرئيسية.